



الإمتحان السداسي الأول في مقياس التحليل العددي 2

سنة ثالثة هندسة كهربائية

المدة: ساعتان

قسم: تكنولوجيا

التمرين الأول (02,5 نقاط):

ليكن الخطأ بطريقة شبه المنحرف معطى بالعلاقة التالية:

$$|e_T(h)| = |I - I_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$

- أحسب عدد التكرارات n من أجل الحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-3} للتكامل

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(x) dx.$$

التمرين الثاني (07,5 نقاط)

ليكن التكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

(1) أحسب القيمة المضبوطة للتكامل I .

(2) أحسب القيمة التقريبية للتكامل I باستعمال:

(أ) طريقة المستطيلات ($h=0,2$)

(ب) طريقة شبه المنحرف ($h=0,25$)

(ج) طريقة سامسون ($h=0,25$)

(3) أحسب الخطأ لكل طريقة، ثم أستنتج أفضل طريقة؟

ملاحظة: الحسابات بـ 4 أرقام بعد الفاصلة.

المسألة (10 نقاط):

لتكن $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ حيث $x \in \mathbb{R}$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذرا وحيدا α في $\mathbb{R}$ وهذا الجذر ينتمي إلى المجال $[\frac{3}{2}, 2]$.

(3) ما هو عدد التكرارات اللازمة n_1 باستعمال طريقة التنصيف المتكرر (Dichotomie) من أجل الحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-6} .

(4) لتكن $\varphi(x) = \left(\frac{3x^2 + 1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ حيث $x \in [\frac{3}{2}, 2]$.

أ) بين أن الدالة φ تحقق الشروط التالية:

(i) $x = \varphi(x) \iff f(x) = 0$

(ii) $\varphi([\frac{3}{2}, 2]) \subset [\frac{3}{2}, 2]$ (φ مستقرة).

(iii) $M = \sup_{x \in [\frac{3}{2}, 2]} |\varphi'(x)| < 1$ (φ مقلصة).

ب) أستنتج أن الصيغة التكرارية $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ متقاربة نحو الجذر α من أجل $x_0 \in [\frac{3}{2}, 2]$.

(5) ما هو عدد التكرارات اللازمة n_2 من أجل الصيغة التكرارية السابقة و $x_0 = 1,75$ من أجل خطأ لا يتجاوز 10^{-6} .

(6) بوضع: $x = t + \frac{1}{2}$ ثم $t = a + b$ ، بين أن:

$$f(x) = 0 \iff a^3 + b^3 + (a+b)(3ab - \frac{3}{4}) - \frac{3}{4} = 0.$$

في باقي الأسئلة نأخذ: $ab = \frac{1}{4}$.

أ) أحسب $a^3 + b^3$.

ب) أستنتج أن a^3, b^3 هما حلان للمعادلة:

$$s^2 - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4^3} = 0$$

$$s = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{8} \text{ وأن:}$$

ج) أستنتج قيمة كل من a, b و t ، ثم بين أن القيمة المضبوطة لـ α هي:

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}).$$

بالتوفيق

تصحيح الامتحان السادس الأول في مقياس التحليل العددي 2

حل الميزان الأول : (02,5 نقاط)

مت أجل $|e_f(h)| \leq 10^{-3}$ يكفي أن يكون :

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{u \in [a,b]} |f''(u)| \leq 10^{-3} \Rightarrow n^2 \geq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot 10^{-3}} \sup_{u \in [a,b]} |f''(u)|$$

$$\Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12} \cdot 10^3 \sup_{u \in [a,b]} |f''(u)|} \quad (0,5)$$

$$f(u) = e^{-u} \cos u$$

$$f'(u) = -e^{-u} \cos u - e^{-u} \sin u \quad (0,5)$$

$$f''(u) = e^{-u} \cos u + e^{-u} \sin u + e^{-u} \sin u - e^{-u} \cos u$$

$$= 2 e^{-u} \sin u \quad (0,5)$$

$$\sup_{u \in [0, 2\pi]} |f''(u)| = 2, \quad (|f''(u)| \leq 2e^{-u}) \quad (0,5)$$

$$n \geq \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{12} \times 10^3 \times 2} = 20\pi \sqrt{\frac{10\pi}{3}} = 203,32 \dots, n = 204 \quad (0,5)$$

حل الميزان الثاني : (07,5 نقاط)

$$I = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$$

(1) حساب القيمة الحقيقية لـ I :

$$I = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctg(u) \Big|_0^1 = \arctg(1) = 0,7854 \quad (1)$$

(2) حساب القيمة التقريبية لـ I :

طريقة المماسلات : $I_R = h \sum_{i=0}^n f(u_i), \quad n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0,2} = 5 \quad (0,25)$

u_i	$u_0 = 0$	$u_1 = 0,2$	$u_2 = 0,4$	$u_3 = 0,6$	$u_4 = 0,8$	$u_5 = 1$
$\alpha_i = \frac{u_{i-1} + u_i}{2}$		0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$f(\alpha_i)$		0,9901	0,9174	0,8000	0,6711	0,5525

$$I_R = h [f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3) + f(\alpha_4) + f(\alpha_5)]$$

$$= 0,2 [0,9901 + 0,9174 + 0,8 + 0,6711 + 0,5525] \quad (0,5)$$

$$= 0,7862 \quad (0,5)$$

من جهة أخرى لدينا : $f(\frac{3}{2}) \times f(2) < 0$ فإن $\exists ! \alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$ (0,1)

(3) حساب عدد التكرارات n_1 : $|u_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n_1+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow n_1+1 \geq \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}$ (0,2)

$\Rightarrow n_1 \geq \frac{\ln \frac{2-\frac{3}{2}}{10^{-6}}}{\ln 2} - 1 = 18,93 - 1$ (0,2)

أي : $n_1 \approx 18$ (0,2)

i) $u = \varphi(u) \Leftrightarrow u = \left(\frac{3u^2+1}{2} \right)^{1/3} \Leftrightarrow 2u^3 - 3u^2 - 1 = 0$ (4)
 $\Leftrightarrow f(u) = 0, \forall u \in [\frac{3}{2}, 2]$ (0,1)

ii) φ متزايدة تمامًا (متزايدة) على المجال $[\frac{3}{2}, 2]$ (حساب φ والتكرارات) (0,1)
 $\varphi([\frac{3}{2}, 2]) = [\varphi(\frac{3}{2}), \varphi(2)] = [1,570..., 1,866...] \subset [\frac{3}{2}, 2]$ (0,5)
 φ مستمرة

iii) $\varphi'(u) = u \left(\frac{3u^2+1}{2} \right)^{-2/3} > 0, \forall u \in [\frac{3}{2}, 2]$ (0,2)
 $\varphi''(u) = -(u+1)(u-1)(3u^2+1)^{-1} \left(\frac{3u^2+1}{2} \right)^{-2/3} < 0, \forall u \in [\frac{3}{2}, 2]$ (0,2)
 $M = \sup_{[\frac{3}{2}, 2]} |\varphi''| = \varphi'(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \left(\frac{8}{31} \right)^{2/3} = 0,6080091585 < 1$ (0,1)
 φ مقبولة

(v) حسب نظرية النقطة الثابتة فإن الصيغة التكرارية $u_{n+1} = \varphi(u_n)$

متقاربة نحو الجذر α في المجال $[\frac{3}{2}, 2]$. (0,1)

(5) حساب عدد التكرارات n_2 :

$\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \} \subset \mathbb{R}^+$

$$: a^3 + b^3 \text{ (Limit)} \quad (3)$$

$$a^3 + b^3 + (a+b) \left(3 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{3}{4} \right) - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{a^3 + b^3 = \frac{3}{4}}$$

$$ab = \frac{1}{4} : \text{Limit}$$

$$: \text{Limit} \quad (0, 25)$$

$$: \text{Limit} \quad (0)$$

$$(*) \dots s^2 - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4^3} = 0 : \text{Limit}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{4^3}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{4^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} > 0 \quad (0, 25)$$

$$(0, 25) s_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}$$

$$(0, 25) s_2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}$$

$$\boxed{s = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{8}}$$

$$: \text{Limit}$$

$$: t, b, a \text{ (Limit)} \quad (0)$$

$$(0, 25) b^3 = \frac{1}{8}(3 - 2\sqrt{2}) \quad , \quad a^3 = \frac{1}{8}(3 + 2\sqrt{2}) : \text{Limit} \quad (0, 25) \text{ (0, 25) (0, 25)}$$

$$(0, 25) b = \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} \quad , \quad a = \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} : \text{Limit}$$

$$(0, 25) t = a + b = \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} : \text{Limit}$$

$$\alpha = n = t + \frac{1}{2} : \text{Limit}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} : \text{Limit}$$

$$(0, 25) \boxed{\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} \right)} : \text{Limit}$$